Transformasi Wavelet Kontinu pada Ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan Dilasi Vektor

Oleh:
Rizky Darmawan (1213201052)

Dosen Pembimbing :
Dr. Mahmud Yunus, M.Si

Program Studi Magister Matematika
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

Seminar Hasil Tesis| 13-04-2016

ITS
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Pendahuluan

❑ Latar Belakang

- ✓ Transformasi Wavelet merupakan topik matematika yang mengalami perkembangan
- ✓ Salah satu pengembangan tersebut adalah konsep transformasi wavelet kontinu pada ruang $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ dengan dilasi vektor
- ✓ Di sisi lain kontinuitas fungsi dan pembahasan mengenai transformasi linier terbatas merupakan topik menarik untuk dikaji

❑ Rumusan Masalah

- ✓ Bagaimana syarat sehingga transformasi wavelet kontinu pada pada ruang $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ dengan dilasi vektor merupakan transformasi linier terbatas ?
- ✓ Bagaimana syarat sehingga fungsi hasil transformasi wavelet kontinu pada pada ruang $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ dengan dilasi vektor merupakan fungsi kontinu?

Pendahuluan

❑Batasan Masalah

- ✓ Nilai $\boldsymbol{p}$ dan $\boldsymbol{n}$ pada $\boldsymbol{L^p}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ masing-masing adalah bilangan asli
- ✓ Kekontinuan fungsi hasil transformasi yang akan dibahas adalah kekontinuan pada $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$.
- ✓ Transformasi wavelet kontinu yang dibahas merupakan transformasi linier dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^\infty(\mathbb{R}_+^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$

❑Tujuan Penelitian

- ✓ Mendapatkan syarat sehingga transformasi wavelet kontinu pada pada ruang $\boldsymbol{L^p}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ dengan dilasi vektor merupakan transformasi linier terbatas
- ✓ Mendapatkan syarat sehingga fungsi hasil transformasi wavelet kontinu pada pada ruang $\boldsymbol{L^p}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ dengan dilasi vektor merupakan fungsi kontinu

Pembahasan Penelitian

- Tinjauan Pustaka dan Dasar Teori
- Transformasi Wavelet Kontinu sebagai Transformasi Linier Terbatas
- Kontinuitas Fungsi Hasil Transformasi Wavelet
- Kesimpulan

Tinjauan Pustaka

- **Definisi[1]** Suatu fungsi $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ disebut wavelet jika memenuhi kondisi berikut

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) = 0 \ , \qquad \text{dengan } \psi \neq 0$$

- **Definsi[1]** Transformasi wavelet kontinu dari fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ adalah

$$W_\psi f(a,b) := a^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \, , \qquad a \in \mathbb{R}_+, \qquad b \in \mathbb{R}^n$$

Tinjauan Pustaka

❖ **Definsi[2]** Transformasi wavelet kontinu dengan dilasi vektor dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah

$$W_\psi f(a,b) := \frac{1}{\det\big(\mathrm{diag}(a)\big)^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi\big(\mathrm{diag}(a)^{-1}(t-b)\big)}dt$$

Untuk $b \in \mathbb{R}^n$ dan

$$\mathrm{diag}(a) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

$$a_i \in \mathbb{R}^+, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Dasar Teori

- **Definsi[4]** Ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang yang berbentuk

$$L^p(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \;\; \int_{\mathbb{R}^n} |\, f(t)|^p dt < \infty \right\}$$

- $L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang fungsi yang berbentuk

$$L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \times L^p(\mathbb{R}^n) \coloneqq$$

$$\left\{ f: \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n \;\to \mathbb{C} \;|\|f\|_{L^\infty \times L^p} \coloneqq \; sup_{a \in \mathbb{R}^n_+} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(a, b\,)|^p \, db \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

Transformasi Wavelet sebagai Transformasi Linier Terbatas

- **Lemma 4.1.1.** *Diberkan* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n_+$ *dan* $W\psi f$ *adalah transformasi wavelet dari* f. *Misalkan* q *adalah konjuget eksponen dari* p, *maka*

  (a) *Fungsi* $f(t)\overline{\psi_{a,\_}(t-\cdot)}$ *elemen* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

  (b) *Fungsi* $(W_\psi f(a,\cdot))^{p-1}$ *elemen* $L^q(\mathbb{R}^n)$.

  (c) *Fungsi* $\left\| f(t)\overline{\psi_{a,\_}(t-\cdot)} \right\|_{L^p}$ *terintegral pada* $\mathbb{R}^n$.

- **Lemma 4.1.2.** *Diberikan* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ψ *wavelet,* $a \in \mathbb{R}^n_+$ *dan* $W\psi f$ *adalah transformasi wavelet dari* f. *Misalkan* q *adalah konjuget eksponen dari* p, *maka*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} W_\psi f(a,\cdot) \right\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left\| f(t)\overline{\psi_{a,\_}(t-\cdot)} \right\|_{L^p} dt$$

Transformasi Wavelet sebagai Transformasi Linier Terbatas

- **Teorema 2.3.** *Diberikan* ψ *adalah suatu wavelet. Transformasi wavelet kontinu dari fungsi* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *dengan faktor dilasi vektor yaitu* $W_\psi f$*, dengan* $\rho = 1$ *, adalah transformasi linier terbatas dari ruang* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *ke ruang* $L^\infty(\mathbb{R}_+^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ *dengan*
$$\left\| W_\psi f(a,b) \right\|_{L^\infty \times L^p} \leq \|\psi\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

Kontinuitas Transformasi Wavelet

- **Lemma 4.2.1.** *Jika* $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *maka* $\psi_{a,b} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *untuk* $a \in \mathbb{R}^n_+$ *dan* $b \in \mathbb{R}^n$.

- **Lemma 4.2.2.** *Jika wavelet* $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\lim_{|h_b|\to 0} \left\| \frac{1}{\det(\operatorname{diag}(a))^{\rho}} \overline{\psi\left(\operatorname{diag}(a)^{-1}(\cdot - (b + h_b))\right)} - \frac{1}{\det(\operatorname{diag}(a))^{\rho}} \overline{\psi\left(\operatorname{diag}(a)^{-1}(\cdot - b)\right)} \right\|_{L^q} = 0$$

untuk $1 \leq q \leq \infty$, *dimana* $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ *dan* $\rho > 0$ *adalah tetap.*

Kontinuitas Transformasi Wavelet

- **Lemma 4.2.3.** *Didefinisikan fungsi* $G : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$ *dengan*

$$G(a) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_i^{\rho}} \overline{\psi\left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \frac{t_2 - b_2}{a_2}, \cdots, \frac{t_n - b_n}{a_n}\right)} \quad \forall a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$$

dimana $t = (t_1, \cdots, t_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *dan* $\rho > 0$ *adalah tetap. Jika wavelet* ψ *kontinu pada* $\mathbb{R}^n$ *maka* G *kontinu pada* $\mathbb{R}^n_+$.

- **Lemma 4.2.4.** *Jika wavelet* $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\lim_{|h_a| \to 0} \frac{1}{\det(\text{diag}(a + h_a))^{\rho}} \overline{\psi\left(\text{diag}(a + h_a)^{-1}(t - b)\right)}$$
$$= \frac{1}{det(\text{diag}(a))^{\rho}} \overline{\psi\left(\text{diag}(a)^{-1}(t - b)\right)}$$

$t \in \mathbb{R}^n$ *dengan* $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ *dan* $\rho > 0$ *adalah tetap.*

Kontinuitas Transformasi Wavelet

- **Teorema 2.8.** *Diberikan* ψ *adalah suatu wavelet. Jika* $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *maka fungsi hasil transformasi wavelet kontinu pada ruang* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *dengan faktor dilasi vektor, yaitu* $W_\psi f$ *merupakan fungsi kontinu pada* $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$.

Kesimpulan

- ✓ Transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor untuk $\rho = 1$ meruapakan transformasi linier terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^\infty(\mathbb{R}_+^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$, sebab terdapat $M \geq 0$ sedemikian hingga

$$\|W_\psi f\|_{L^\infty \times L^p} \leq M\|f\|_{L^p}$$

  yaitu$M = \|\psi\|_{L^1}$

- ✓ Syarat cukup sehingga fungsi hasil transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$ adalah $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Daftar Pustaka

[1] Daubechies, I.,1992, "Ten Lectures on Wavelets,"SIAM, Pennsylvania.

[2] Pathak, R.S.,2009, "The Wavelet Transform," *Atlantis Press/World Scientific, Paris*.

[3] Koornwinder, T. H. , 1993,Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications, World Scientific.

[4] Jones, F. , 1993, "Lebesgue Integration on Euclid Space," *Jones and Bartlet Publishers* , Boston, London.

[5] Rynne B.P., Youngson, M.A., , 2001,"Linear Functional Analysis ," *Springer*.

[6] Apostol J.R.L, 1996, "Calculus vol.2 ," John Wiley and Son.

Daftar Pustaka

[7] Ashino, R.,2002, "Some Topics On Wavelets ," Division Mathematical Science, Osaka Kyoiku University, Osaka.

[8] Navarro. J, and Herrera., 2012, "Convergence of Discrete Wavelet Transform," International Jurnal of Wavelet, World Scientific Publishing Company, vol.10, No.6 .

[9] Chui, K. , 1992, An Introduction to Wavelets, Academic Press, Boston.

[10] Grossman ,A, and Morlet, J. , 1984, "Decomposition of Hardy Function into Square Integrable Wavelets of Constante Shape," SIAM Journal Mathematical Analysis , Vol. 15 (723-736).

[11] Gunawan, H., , 2014,"Catatan Kuliah Analisis Fourier dan Wavelet," Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Departement Matematika, Institut Teknologi Bandung, Bandung.

Daftar Pustaka

[12] Pathak, R.S.,2004, "The Wavelet Transform of Distributions," Tohoku Math. Journal, Vol.56(411-421).

[13] Pathak, R.S.,1998, "Continuity and Inversion of Wavelet Transform," Integral Transform and Special Functions, Taylor and Francise Online,Vol. 6(1-6).

[14] Webb, J.R.L. , 1991, Functions of Several Variabels, Ellis Horwood in Mathematics and its Application.

[15] Yunus ,M. , 2005, "Modul Ajar Pengantar Analisis Fungsional," Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Terima kasih !

Seminar Hasil Tesis| 13-04-2016

ITS
Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember